Analiza w przestrzeniach L_p
Lista 1

Zad 1. Pokazać, że w każdej przestrzeni unormownej $(X, \|\cdot\|)$ wzór $d(x,y) = \|x-y\|$ zadaje metrykę.

Zad 2. Udowodnić nierówność Younga, tj. że dla każdych $a, b > 0$ oraz $p, q > 1$ takich, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ mamy $ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. Zauważyć, że równanie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ma rozwiązanie w liczbach dodatnich wtedy i tylko wtedy, gdy $p, q > 1$.

Zad 3. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Niech $n \in \mathbb{N}$ i $p > 0$. Wykazać, że wzór $\|x\|_p := \sqrt[p]{\sum_{k=1}^n |x(k)|^p}$ definiuje normę na n-wymiarowej przestrzeni liniowej $\mathbb{K}^n$ wtedy i tylko wtedy, gdy $p \ge 1$.

Zad 4. Wykazać, że wzór $\|x\|_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |x(k)|$ definiuje normę na $\mathbb{K}^n$ oraz $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Zad 5. Naszkicować kule jednostkowe na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ w normach $\|\cdot\|_p$ dla $p \in [1, \infty]$.

Zad 6. Udowodnić, że na przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{K}^n$ wszystkie normy $\|\cdot\|_p$, $p \in [1,\infty]$, są równoważne, tzn. dla dowolnych $p_1, p_2 \in [1,\infty]$ istnieją $c_1, c_2 > 0$ takie, że $\|x\|_{p_1} \le c_1 \|x\|_{p_2}$ oraz $\|x\|_{p_1} \le c_2 \|x\|_{p_2}$. (De facto wszystkie normy na przestrzeni skończenie wymiarowej $\mathbb{K}^n$ są sobie równoważne.)

Zad 7. Wykazać, że podane zbiory ciagów o wyrazach w ciele $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, wraz z działaniami określonymi po współrzednych, stanowią przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$:

$$\ell_\infty = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)| < \infty\},$$

$$\ell_p = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \textstyle\sum_{k=1}^\infty |x(k)|^p < \infty\},\ p \in (0,\infty),$$

$$c = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \lim_{k\to\infty} x(k) \text{ istnieje}\},$$

$$c_0 = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \lim_{k\to\infty} x(k) = 0\}.$$

Zad 8. Udowodnić, że dla dowolnych $0 < p < q < \infty$ zachodzą właściwe inkluzje

$$\ell_p \subsetneq \ell_q \subsetneq c_0 \subsetneq c \subsetneq \ell_\infty.$$

Zad 9. Pokazać, że wzór $\|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)|$ definiuje normę na przestrzeniach ℓ_∞, c oraz c_0. Udowodnić, że wraz z tą normą przestrzenie te są zupełne i tworzą wstępujący ciąg domkniętych podprzestrzeni $c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty$.

Zad 10. Pokazać, że wzór $\|x\|_p = (\sum_{n=1}^\infty |x(n)|^p)^{\frac{1}{p}}$ definiuje normę na przestrzeni ℓ_p wtedy i tylko wtedy, gdy $p \ge 1$. Ponadto dla $p \ge 1$ przestrzeń ℓ_p wraz z normą $\|\cdot\|_p$ jest zupełna.

Zad 11. Wyznaczyć odległość wektorów x, y w przestrzeni X:

N	X	x	y	N	X	x	y
a)	ℓ_∞	$x(n) = (1+\frac{1}{n})^n$	$(1,0,0,...)$	c)	ℓ_1	$(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, ...)$	$(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ...)$
b)	c_0	$x(n) = \frac{n}{n^2+1}$	$y(n) = \frac{1}{n^2+1}$	d)	$\ell_{\frac{3}{2}}$	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, ...)$	$(0,0,...)$

Zad 12. Pokazać, że w przestrzeniach ciagów c_0, c, ℓ_p, $p \in [1,\infty]$, zbieżność w normie pociąga zbieżność po współrzędnych, ale nie jest jej równoważna,

Zad 13. Wykazać, że w przestrzeniach ℓ_p, $p \in [1,\infty]$, nie istnieje norma, w której zbieżność byłaby równoważna zbieżności po współrzędnych.

Zad 14. Sprawdzić, czy ciąg x_n elementów przestrzeni Banacha X jest zbieżny do elementu a:

	X	x_n	a		X	x_n	a
a)	ℓ_1	$(\underbrace{\sin\frac{1}{2^n}, ..., \sin\frac{1}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	e)	ℓ_∞	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{n^3-1}{n^3}, 0, 0, ...)$	$(0, \frac{7}{8}, ..., \frac{k^3-1}{k^3}, ...)$
b)	ℓ_3	$(\underbrace{\frac{n^2}{2^n}, \frac{n^2}{2^n}, ..., \frac{n^2}{2^n}}_{n}, 0, ...)$	$(1,0,...,0,...)$	f)	ℓ_∞	$(\underbrace{\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^2}, ..., \frac{1}{n^2}}_{n}, n, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$
c)	c	$(\underbrace{(\frac{4n+1}{4n+3})^n, ..., (\frac{4n+1}{4n+3})^n}_{n}, 0, ...)$	$(e^{-\frac{1}{2}}, ..., e^{-\frac{1}{2}}, ...)$	g)	ℓ_p	$(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, \underbrace{\frac{1}{n^2}, ..., \frac{1}{n^2}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$
d)	$\ell_{\frac{8}{5}}$	$(\underbrace{\frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}, ..., \frac{\cos\frac{1}{n}}{n}}_{n}, 0, ...)$	$(0,0,...,0,...)$	h)	c_0	$x_n(k) = 1 - (\frac{1}{k})^n$	$(1,1,1,1,...)$